

ANALISIS 3D SOLIDS DENGAN METODE ELEMEN HINGGA BERBASIS KRIGING

Welly Pontjoharyo¹, Wong Foek Tjong², dan Januar Budiman³

ABSTRAK

Akhir-akhir ini telah dikembangkan suatu varian metode elemen hingga (MEH) yang dinamakan MEH berbasis Kriging (MEH-K). Dengan MEH-K memungkinkan mendapatkan solusi akurat meskipun dengan memakai *mesh* dengan elemen-elemen yang sederhana. *Shape function* dengan basis polinom berderajat tinggi dapat dibangun tanpa memperbanyak *node* pada elemen karena dapat dibangun dari *node* di sekeliling elemen tersebut. MEH-K mudah diimplementasikan ke dalam program karena masih menggunakan dasar program yang sama seperti MEH. Dalam makalah ini akan disajikan pengembangan MEH-K untuk analisis statik linier 3D *solids*. Elemen yang digunakan untuk membangun interpolasi Kriging adalah elemen yang paling sederhana dalam ruang tiga dimensi, yaitu elemen tetrahedron dengan 4 *node*. Implementasi MEH-K dilakukan dalam bahasa pemrograman Matlab. Perangkat lunak GiD digunakan untuk membuat *mesh* dan untuk menyajikan hasil-hasil analisis. Keakuratan dan kekonvergenan MEH-K 3D *solids* ini diuji dengan menyelesaikan berbagai *benchmark problems*. Hasil-hasil pengujian memperlihatkan bahwa MEH-K 3D *solids* dapat memberikan solusi yang sangat akurat dan distribusi tegangan yang halus meskipun dengan jumlah elemen yang tidak terlalu banyak. Kelemahan utamanya adalah untuk aplikasi pada benda yang tipis, solusi MEH-K 3D *solids* konvergen ke solusi yang lebih besar daripada solusi referensi.

KATA KUNCI: MEH-K, statik linier, 3D *solids*

ABSTRACT

Recently a variant of the finite element method (FEM), called Kriging-based FEM (K-FEM), has been developed. With K-FEM, an analyst can obtain accurate solutions although using a mesh with simple elements. Shape functions with a high degree polynomial basis can be constructed without increasing the element nodes because they can be constructed from a set of nodes around the element. The K-FEM can be easily implemented because it still uses the same basic program as the conventional FEM. This paper presents a development of the K-FEM for linear static analysis of 3D solids. The elements used to construct Kriging interpolation is the simplest element in three-dimensional space, namely tetrahedron elements with 4 nodes. The K-FEM for 3D solids is implemented in Matlab programming language. The GiD software is used to create meshes and to present the analysis results. The accuracy and convergence of the present elements are examined by solving a number of benchmark problems. The results show that the K-FEM-K 3D solids can produce a highly accurate solution and smooth stress distribution even with a not very fine mesh. Its weakness is that for applications on thin solid objects, the solutions of the K-FEM 3D solids may converge to a larger value than the reference solution.

KEYWORDS: K-FEM, linear static, 3D solids

¹ Mahasiswa S-2 Program Studi Teknik Sipil, Universitas Kristen Petra, Surabaya, just_woodpecker@yahoo.com.

² Program Studi Magister Teknik Sipil, Universitas Kristen Petra, Surabaya, wftjong@petra.ac.id.

³ Program Studi Magister Teknik Sipil, Universitas Kristen Petra, Surabaya, januar@petra.ac.id.

ANALISIS 3D SOLIDS DENGAN METODE ELEMEN HINGGA BERBASIS KRIGING

Welly Pontjoharyo, Wong Foek Tjong, dan Januar Budiman

1. PENDAHULUAN

Metode elemen hingga (MEH) kini telah menjadi metode praktis yang digunakan dalam 50 tahun terakhir. Metode ini dapat mempermudah analisis dalam menyelesaikan masalah-masalah yang biasanya sulit dipecahkan dengan metode analitik, yaitu masalah yang meliputi bentuk geometri, beban dan material yang rumit. MEH telah diterapkan untuk mendesain bangunan, mesin, sistem elektrik, kapal, pesawat, dan sebagainya (Cook *et al.*, 2002). Pengguna MEH dalam praktek lebih sering menggunakan elemen sederhana untuk mempermudah perhitungan tetapi hasilnya memiliki akurasi buruk pada gradien dari *field variable*, seperti tegangan.

Akhir-akhir ini telah dikembangkan suatu varian MEH oleh Plengkhom dan Kanok-Nukulchai (2005), yaitu MEH berbasis Kriging (MEH-K). Dengan MEH-K, gradien dari *field variable* dapat diperoleh dengan akurat walau hanya menggunakan bentuk elemen yang paling sederhana. Perbaikan solusi MEH dapat diperoleh tanpa adanya penambahan *node* pada elemen atau perubahan struktur *mesh*. Formulasi dan pemrograman MEH-K sangat serupa dengan MEH konvensional sehingga program MEH umum yang sudah ada dapat dengan mudah dimodifikasi untuk mengikuti MEH-K. Suatu kelemahan dari metode ini adalah fungsi interpolasinya diskontinu pada batas antarelemen (*non-conforming*). Masalah diskontinuitas ini dan pengaruhnya pada konvergensi hasil MEH-K telah diselidiki oleh Wong dan Kanok-Nukulchai (2009) dan didapati bahwa meskipun MEH-K *non-conforming*, dengan pemilihan parameter *shape function* Kriging yang sesuai hasil-hasil MEH-K selalu konvergen.

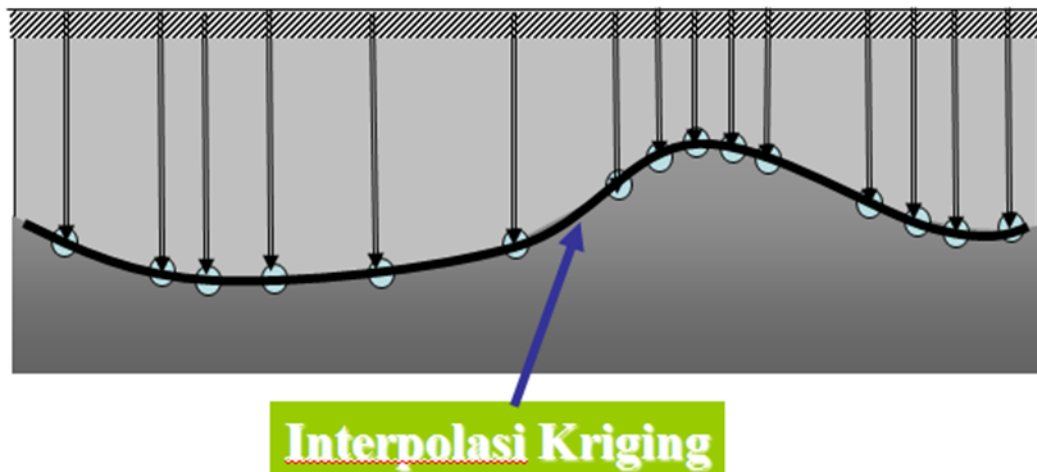
Dalam perkembangan MEH-K, MEH-K sudah berhasil dengan baik diterapkan dalam masalah 1 D *bar* dan 2 D *solids* oleh Plengkhom dan Kanok-Nukulchai (2005), dan juga diterapkan dengan baik untuk analisis pelat Reissner-Mindlin (Wong dan Kanok-Nukulchai, 2006a, 2006b), struktur *shell* (Wong dan Kanok-Nukulchai, 2008; Wong, 2009) dan analisis balok Timoshenko (Wong dan Syamsoeyadi, 2011). Dalam makalah ini MEH-K dikembangkan untuk masalah statik linier 3D *solids*. Elemen yang digunakan untuk membangun interpolasi Kriging adalah elemen yang paling sederhana dalam ruang tiga dimensi, yaitu elemen tetrahedron dengan 4 *node*. Implementasi MEH-K dilakukan dalam bahasa pemrograman Matlab. Perangkat lunak GiD digunakan untuk membuat *mesh* dan untuk menyajikan hasil-hasil analisis.

MEH-K 3D *solids* ini diuji dengan menyelesaikan *benchmark problems*. Hasil pengujian memperlihatkan bahwa MEH-K 3D *solids* memberikan solusi yang lebih akurat dan distribusi tegangan yang lebih halus daripada MEH konvensional. Kelemahan MEH-K adalah sulit mengatasi analisis pada benda yang tipis.

2. INTERPOLASI KRIGING

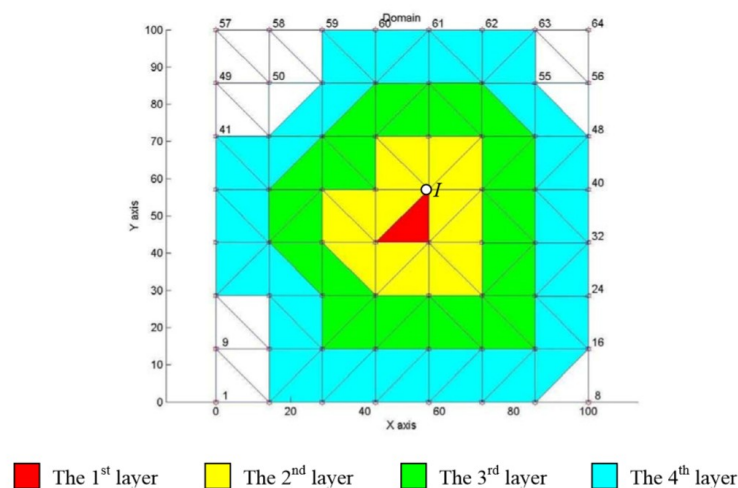
Interpolasi Kriging adalah teknik geostatistik untuk interpolasi ruang yang banyak digunakan dalam ilmu geologi dan pertambangan. Nama Kriging diambil dari nama

seorang insinyur pertambangan Afrika Selatan bernama Danie G. Krige (Olea, 1999; Tongtuk dan Kanok-Nukulchai, 2004). Dengan menggunakan interpolasi ini, maka suatu titik yang tidak diketahui nilai variabelnya dapat diinterpolasi dari nilai-nilai variabel yang telah diketahui di sekitar titik tersebut. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Skema interpolasi Kriging (Kanok-Nukulchai, W., dan Wong, F. T., 2008)

Dalam MEH-K, *shape function* Kriging digunakan sebagai pengganti *shape function* polinom dalam MEH konvensional (Plengkhom dan Kanok-Nukulchai, 2005). *Shape function* Kriging ini dibangun dari nilai-nilai variabel pada *node* yang bukan hanya milik elemen itu sendiri tetapi juga dari *node* di sekeliling elemen seperti diilustrasikan pada Gambar 2. Jumlah elemen yang dilibatkan dalam pembentukan *shape function* Kriging dapat dua lapis elemen sekitar atau lebih. Elemen-elemen inti dan sekitarnya ini membentuk daerah dari *node* yang berpengaruh terhadap interpolasi Kriging dalam elemen inti dan dinamakan *domain of influencing nodes* (DOI, lihat Gambar 2).



Gambar 2. Elemen dua dimensi dengan lapisan DOI satu sampai empat (Wong, 2009)

2.1. Shape Function Kriging

Tinjau suatu fungsi (*field variable*) $u(\mathbf{x})$ yang didefinisikan pada sebuah *domain* Ω yang direpresentasikan oleh *node* yang tersebar \mathbf{x}_i , $i = 1, 2, \dots, N$, di mana N adalah jumlah *node* pada seluruh *domain* Ω . Untuk suatu titik \mathbf{x}_0 yang sedang diamati, definisikan suatu *domain* berpusat pada titik \mathbf{x}_0 dan mencakup sejumlah titik-titik berdekatan (*domain* ini adalah *domain of influencing nodes*, DOI). Diasumsikan setiap *nodal field variable* dalam DOI, $u(\mathbf{x}_1), \dots, u(\mathbf{x}_n)$ berpengaruh pada nilai *field variable* titik \mathbf{x}_0 . Untuk memperkirakan nilai dari $u(\mathbf{x}_0)$ tersebut, diasumsikan nilai perkiraan u^h sebagai kombinasi linier dari $u(\mathbf{x}_1), \dots, u(\mathbf{x}_n)$, yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$u^h(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(\mathbf{x}_i) \quad (1)$$

di mana λ_i adalah Kriging *weights* dan n adalah jumlah *node* yang berada di dalam DOI dari titik \mathbf{x}_0 . Dikarenakan nilai dari $u(\mathbf{x}_1), \dots, u(\mathbf{x}_n)$ dipandang sebagai realisasi dari sebuah variabel acak $U(\mathbf{x})$, maka persamaan (1) dapat ditulis:

$$U^h(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i U(\mathbf{x}_i) \quad (2)$$

Untuk menentukan Kriging *weights*, estimator $U^h(\mathbf{x}_0)$ ini disyaratkan *unbiased*, yaitu

$$E[U^h(\mathbf{x}_0) - U(\mathbf{x}_0)] = 0 \quad (3)$$

Syarat lainnya adalah variansi dari kesalahan estimator, yaitu $\text{var}[U^h(\mathbf{x}_0) - U(\mathbf{x}_0)]$ dibuat minimum. Dengan memakai metode Lagrange untuk masalah *constrained optimization* ini dihasilkan sistem persamaan Kriging sebagai berikut:

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{P}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{r}(\mathbf{x}_0) \quad (4)$$

$$\mathbf{P}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{p}(\mathbf{x}_0) \quad (5)$$

di mana,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} C(\mathbf{h}_{11}) & \dots & C(\mathbf{h}_{1n}) \\ \dots & \dots & \dots \\ C(\mathbf{h}_{n1}) & \dots & C(\mathbf{h}_{nn}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & \dots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & \dots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n]^T, \quad \boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \quad \dots \quad \mu_m]^T \quad (7)$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}_0) = [C(\mathbf{h}_{10}) \quad \dots \quad C(\mathbf{h}_{n0})]^T, \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}_0) = [p_1(\mathbf{x}_0) \quad \dots \quad p_m(\mathbf{x}_0)]^T \quad (8)$$

Dalam persamaan-persamaan ini \mathbf{R} adalah matriks kovarians berukuran $n \times n$ dari variabel acak antara dua nilai *nodal* yang ditinjau pada titik \mathbf{x}_i dan \mathbf{x}_j , $C(\mathbf{h}_{ij})$; \mathbf{P} adalah matriks basis polinom berukuran $n \times m$ (linier, kuadratik atau derajat lebih tinggi), $\boldsymbol{\lambda}$ adalah vektor Kriging *weights* berukuran $n \times 1$, $\boldsymbol{\mu}$ adalah vektor pengali Lagrange berukuran $m \times 1$, $\mathbf{r}(\mathbf{x}_0)$ adalah vektor kovarians antara dua *node*. $n \times 1$, $\mathbf{p}(\mathbf{x}_0)$ adalah vektor basis polinomial berukuran $m \times 1$.

Menyelesaikan sistem persamaan Kriging (4)-(5) menghasilkan Kriging *weights*. Lalu disubstitusi ke nilai perkiraan u^h , sehingga persamaan (1) dapat ditulis kembali seperti berikut:

$$u^h(\mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{d} \quad (9)$$

di mana $\mathbf{d} = [u(\mathbf{x}_1) \quad \dots \quad u(\mathbf{x}_n)]^T$ adalah matriks vektor nilai *nodal* $n \times 1$. Karena titik \mathbf{x}_0 dapat dipandang sebagai variabel bebas, maka simbol \mathbf{x}_0 dapat diganti menjadi simbol \mathbf{x} . Dengan demikian persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{d} = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x})u_i \quad (10)$$

di mana $N(\mathbf{x}) = \lambda^T(\mathbf{x})$ adalah yang dalam MEH dikenal sebagai matriks *shape function*.

Sebuah matriks *shape function* harus memiliki beberapa properti sehingga cocok digunakan dalam MEH. *Shape function* interpolasi Kriging memenuhi dua properti yaitu *Kronecker delta property* dan *consistency property*. Dengan *Kronecker delta property*, *shape function* interpolasi Kriging dapat melalui semua nilai *nodal* dan dapat memiliki prosedur yang sederhana dalam mengenakan *essential boundary conditions*. Dengan *consistency property*, MEH-K dapat memiliki kemampuan merepresentasikan *rigid body motion* dan keadaan regangan konstan.

Shape function Kriging dapat menggantikan *shape function* MEH konvensional sehingga memungkinkan menggunakan suku basis polinom lebih banyak tanpa memperbanyak *nodes* dalam elemen. Dengan begitu Kriging dapat mudah diimplementasikan pada program komersial yang memakai MEH konvensional.

2.2. Basis Polinom dan Fungsi Korelasi

Basis polinom yang berperan dalam pembentukan *shape function* Kriging merupakan fungsi-fungsi basis pembentuk polinomial. Semakin tinggi derajat polinomial m yang digunakan maka semakin banyak juga DOI yang diperlukan, karena jumlah titik *nodal* dalam DOI (n) harus lebih besar atau sama dengan derajat polinomial yang digunakan (m) agar interpolasi Kriging dapat dijalankan (Wong dan Kanok-Nukulchai, 2009).

Dalam membangun *shape function* Kriging membutuhkan model dari fungsi kovarians \mathbf{R} . Model dari fungsi kovarians \mathbf{R} dapat direpresentasikan dalam bentuk fungsi korelasi MEH-K. Dalam makalah ini memakai fungsi korelasi *quartic spline*. Fungsi korelasi $\rho(\mathbf{h})$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\rho(\mathbf{h}) = C(\mathbf{h})/\sigma^2 \quad (11)$$

$$\sigma^2 = \text{var}[U(\mathbf{x})] \quad (12)$$

Menurut Gu (2003), nilai σ^2 ini tidak memiliki pengaruh pada hasil akhir sehingga dalam makalah ini dipakai nilai satu. Rumusan fungsi korelasi *quartic spline* (QS) adalah

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 - 6\left(\theta \frac{h}{d}\right)^2 + 8\left(\theta \frac{h}{d}\right)^3 - 3\left(\theta \frac{h}{d}\right)^4 : \text{ untuk } 0 < \theta \frac{h}{d} < 1 \\ 0 : \text{ untuk } \theta \frac{h}{d} > 1 \end{cases} \quad (13)$$

di mana: $\theta > 0$ merupakan parameter korelasi

h = jarak antara dua titik

d = jarak maksimum antara pasangan *node* pada DOI

Parameter korelasi θ harus diperhatikan dalam upaya memberikan nilai yang baik pada interpolasi Kriging. Menurut Plengkhom dan Kanok-Nukulchai (2005), nilai-nilai parameter korelasi harus ditentukan sedemikian sehingga memenuhi batas bawah,

$$|\sum_{i=1}^n N_i - 1| \leq 1 \times 10^{-10+a} \quad (14)$$

dan memenuhi batas atas:

$$\det([\mathbf{R}]) \leq 1 \times 10^{-b} \quad (15)$$

di mana: a = suku basis polinom (contoh, untuk basis polinom kuadrat, $a = 2$)

b = dimensi permasalahan (1, 2, atau 3)

Pada masalah 3D *solids*, batas-batas parameter korelasi, θ , *quartic spline* dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\theta \text{ batas atas} = \begin{cases} 0,11n - 0,34 & \text{untuk } 4 \leq n < 14 \\ -0,0002n^2 + 0,0589n + 0,3172 & \text{untuk } 14 \leq n \leq 130 \\ 0,0125n + 2,675 & \text{untuk } n > 130 \end{cases} \quad (16)$$

$$\theta \text{ batas bawah} = 0,1 \quad (17)$$

Parameter korelasi dapat diaplikasikan dalam MEH-K secara adaptif sesuai jumlah *node* dalam lapisan DOI, dengan persamaan ini :

$$\theta = (1 - f) \times \theta \text{ batas atas} + f \times \theta \text{ batas bawah} \quad (18)$$

di mana f adalah faktor skala dengan batas $0 \leq f < 1$.

3. PERUMUSAN DAN IMPLEMENTASI MEH-K UNTUK ANALISIS 3D SOLIDS

Dalam Galerkin *weak form*, persamaan kesetimbangan untuk masalah elastisitas 3D *solids* adalah sebagai berikut:

$$\int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega = \int_{\Omega} \{\delta u\}^T \{f_b\} d\Omega + \int_S \{\delta u\}^T \{f_s\} dS \quad (19)$$

di mana $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \varepsilon_{xy} \ \varepsilon_{yz} \ \varepsilon_{xz}\}^T$ adalah vektor regangan, $\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{xz}\}^T$ adalah vektor tegangan, $\{u\} = \{u_x \ u_y \ u_z\}^T$ adalah vektor fungsi perpindahan, $\{f_b\}$ adalah *body force* dalam volume Ω dan $\{f_s\}$ adalah *surface traction* dalam permukaan S .

Sebuah benda 3D yang dinyatakan dengan Ω dibagi oleh *mesh* yang terdiri dari elemen dan *nodes*. Elemen yang digunakan makalah ini elemen tetrahedron dengan 4 *node*. Untuk setiap elemen berlaku persamaan kesetimbangan $[k^e] \{d^e\} = \{f^e\}$. Di mana $[k^e]$ adalah matriks kekakuan elemen, $\{d^e\}$ adalah matriks perpindahan elemen, dan $\{f^e\}$ adalah *equivalent nodal force* dari elemen e . $\{f^e\}$ dibangun dengan *shape function* Kriging menghasilkan *equivalent nodal force* bekerja pada *node* dalam lapisan DOI sebuah elemen. Interpolasi Kriging digunakan untuk mengaproksimasi solusi dalam menyelesaikan persamaan kesetimbangan untuk setiap elemen.

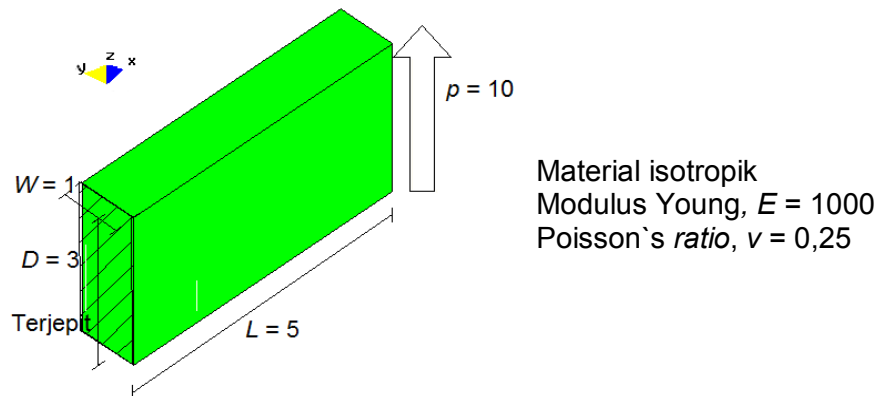
Implementasi MEH-K dilakukan dalam bahasa pemrograman Matlab. Perangkat lunak GiD versi 7.2 digunakan untuk membuat *mesh* dan untuk menyajikan hasil-hasil analisis. *Meshing* dilakukan tiga kali yaitu *mesh* kasar, medium, dan halus pada setiap *benchmark problem*. Tiga *meshing* dilakukan untuk melihat tingkat konvergensi tiap *problem* dan dibandingkan dengan hasil MEH konvensional (MEH-K basis polinom linier) yang mana sering dipakai pada program komersial. Dalam program ini user dapat memilih keakuratan hasil yaitu dengan memilih basis polinom (linier, kuadrat, kubik) dan jumlah lapisan DOI (1 sampai 3) yang ingin dipakai tanpa mengubah struktur *mesh*. Integrasi pada persamaan (19) menggunakan 11 titik sampel kuadratur untuk perhitungan integral volume dan 7 titik sampel untuk perhitungan integral permukaan. Jumlah titik sampel kuadratur tersebut dipilih karena jumlah tersebut sudah dapat menghasilkan nilai yang konsisten.

4. HASIL DAN DISKUSI

Dalam analisis berikut ini akan digunakan singkatan dalam bentuk P^*-QS^* . Lambang P^* menyatakan basis polinom, * setelahnya menyatakan banyak lapisan DOI, dan QS^* menyatakan fungsi korelasi *quartic spline* dengan faktor korelasi adaptif berskala $f=0,5$ (lihat persamaan 18). Sebagai contoh $P3-3-QS0,5$ artinya MEH-K dengan basis polinom kubik, tiga lapisan DOI, fungsi korelasi *quartic spline* dengan faktor skala $f=0,5$. Pada analisis ini opsi MEH-K yang digunakan adalah $P1-1-QS0,5$, $P2-2-QS0,5$, dan $P3-3-QS0,5$. MEH-K $P1-1-QS0,5$ mewakili nilai dari MEH konvensional dengan basis polinom linier.

4.1. Three-dimensional Cantilever Beam

Three dimensional (3D) cantilever beam dibebani dengan gaya geser parabola pada sisi ujung dan dijepit dengan *prescribed displacement* seperti pada Gambar 3. Gaya geser yang diberikan sebesar total 10 satuan.



Gambar 3. Model 3D cantilever beam (Pudjistryadi, 2002)

Hasil-hasil analisis dengan MEH-K 3D untuk *cantilever beam* dengan berbagai *mesh* dapat dilihat pada Tabel 1 dan Tabel 2. Sebagai acuan untuk menilai keakuratan hasil-hasil digunakan *reference solution* berupa teori *plane stress* pada Pudjistryadi (2002). Seperti diharapkan, hasil analisis menunjukkan konvergensi MEH-K lebih cepat dari pada MEH konvensional (MEH-K $P1-1-QS0,5$). Namun yang di luar dugaan adalah hasil MEH-K $P2-2-QS0,5$ terlihat sedikit lebih baik dari pada MEH-K $P3-3-QS0,5$. Hal mungkin disebabkan elemen-elemen pada $P3-3-QS0,5$ memiliki jumlah *nodes* dalam DOI yang lebih beragam daripada $P2-2-QS0,5$.

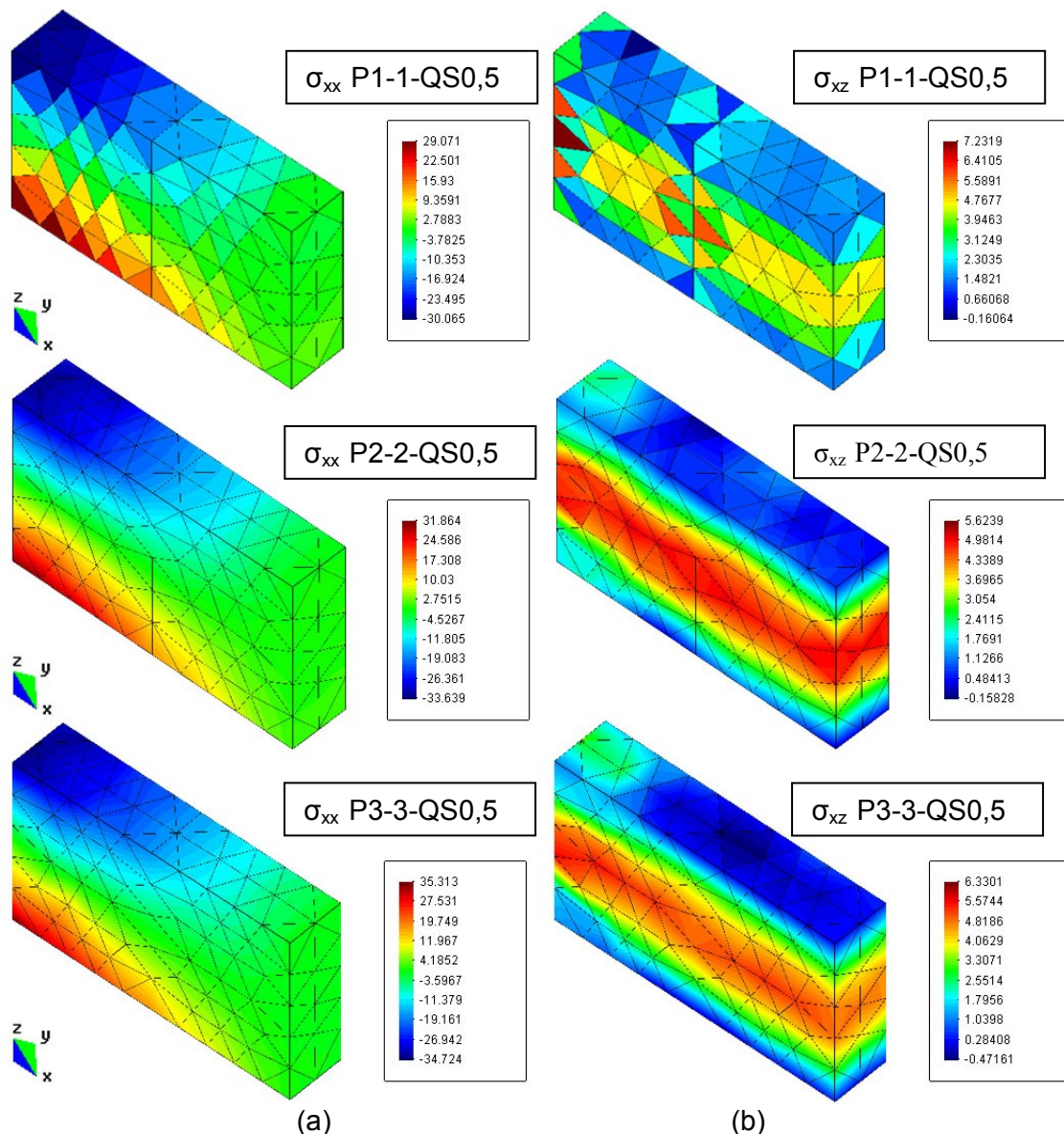
Tabel 1. Relative error perpindahan arah z cantilever beam

Jumlah Elemen	Relative Error Perpindahan Arah z (%)		
	P1-1-QS0,5	P2-2-QS0,5	P3-3-QS0,5
124	20,253	1,682	4,175
698	4,393	0,396	0,960
5644	1,443	0,384	0,489
Note : Reference Solution = 0,2289			

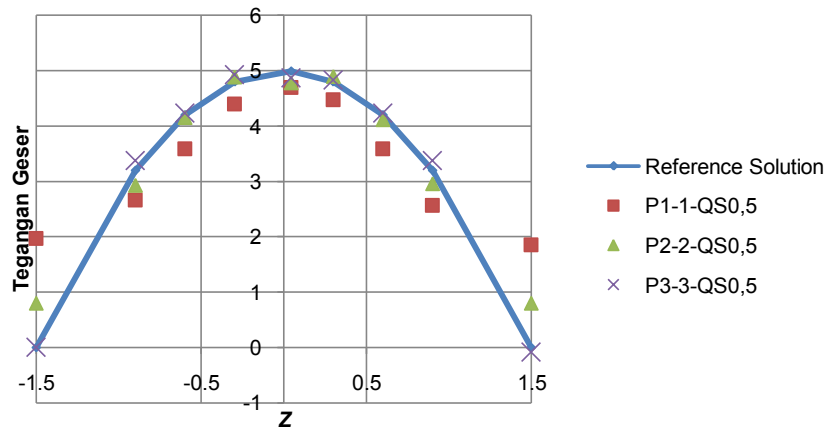
Tabel 2. Strain energy cantilever beam yang dinormalkan terhadap reference solution

Jumlah Elemen	Strain Energy yang Dinormalkan		
	P1-1-QS0,5	P2-2-QS0,5	P3-3-QS0,5
124	0,7742	1,0010	1,0345
698	0,9475	0,9995	1,0063
5644	0,9839	1,0032	1,0044
Note : Reference Solution = 1,1759			

Kontur hasil tegangan lentur σ_{xx} dan tegangan geser σ_{xz} untuk *cantilever beam* dengan *mesh* medium diperlihatkan pada Gambar 4. Pada visualisasi ini terlihat bahwa MEH-K sudah cukup halus dibandingkan dengan MEH konvensional walaupun MEH-K masih memiliki sifat *non-conforming*. Profil tegangan geser tengah bentang (yakni pada posisi $x = 2,5$) *cantilever beam* diperlihatkan pada Gambar 5. Terlihat dari gambar ini hasil P2-2-QS0,5 dan P3-3-QS0,5 mirip dengan *reference solution*-nya. Pada permukaan atas dan bawah benda (yakni pada posisi $z = 1$ dan $z = -1,5$) bahkan hasil dari P3-3-QS0,5 berimpit dengan *reference solution*, yang mana hal ini tidak dapat dicapai oleh MEH konvensional.



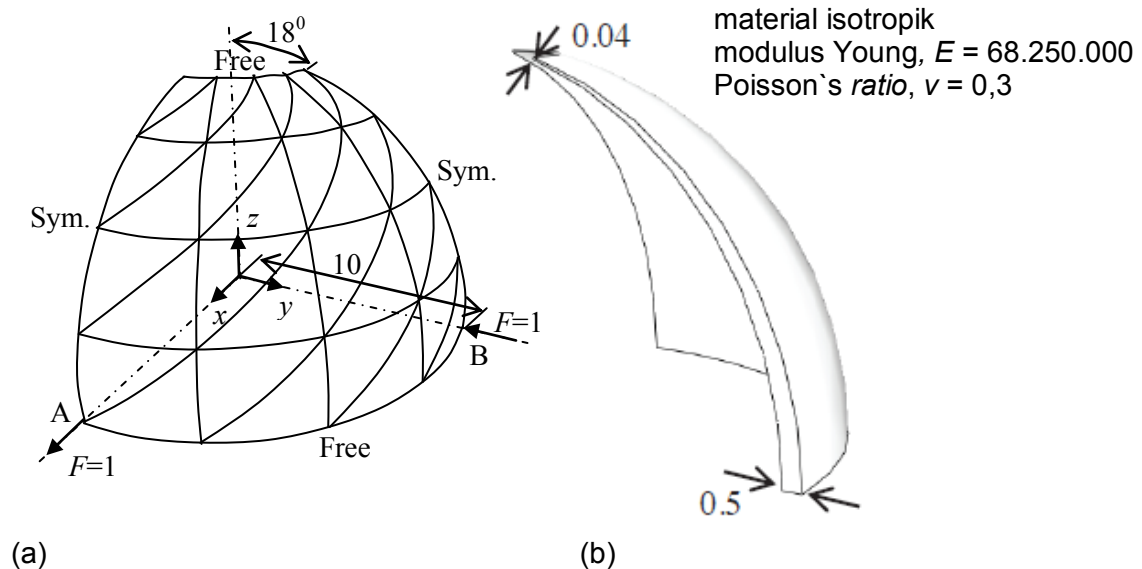
Gambar 4. Kontur: (a) tegangan lentur σ_{xx} dan (b) tegangan geser σ_{xz} *cantilever beam* hasil analisis MEH-K dengan ukuran *mesh* medium



Gambar 5. Profil tegangan geser *cantilever beam* pada tengah bentang

4.2. Spherical Shell

Spherical shell berupa sebuah cangkang berbentuk bola tipis tidak penuh, melingkar sebagian dari sudut 18° hingga 90° . *Spherical shell* di tekan pada ujung bawah secara simetri dan di tarik pada ujung bawah lainnya. *Spherical shell* memiliki sifat simetri, maka diambil seperempat bagiannya seperti pada Gambar 6.a. Pada penelitian kali ini dipakai ketebalan yang beragam (*varying thickness*). Ketebalan beragam secara linier dari ketebalan 0,04 di ujung atas hingga 0,5 pada ujung bawah (Gambar 6.b) (Wong *et al.*, 2015). Besar perpindahan pada node yang mengalami gaya sebesar $7,634\text{E-}05$ yang didapat dari hasil 3D ABAQUS (Wong *et al.*, 2015). Nilai perpindahan tersebut dipakai sebagai *reference solution* dalam penelitian.

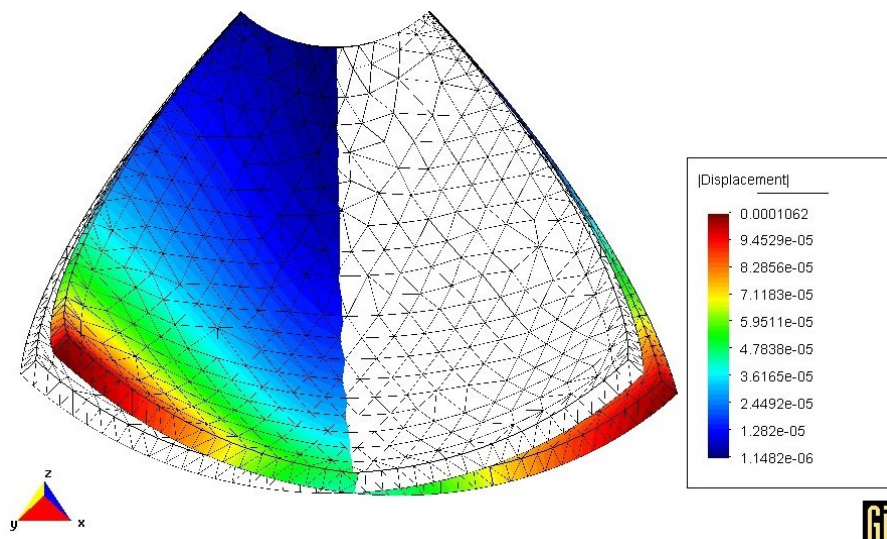


Gambar 6.a. Model *spherical shell*, b. *Spherical shell problem with varying thickness* (Wong *et al.*, 2015)

Hasil perhitungan perpindahan pada *node* yang mengalami *nodal load* yang dinormalkan terhadap *reference solution* dapat dilihat pada Tabel 3. Terlihat bahwa hasil MEH konvensional (P1-1-QS0,5) jauh di bawah, namun hasilnya semakin membaik bila *mesh* diperhalus. Hasil dengan P2-2-QS0,5 dan P3-3-QS0,5 sudah sangat dekat dengan *reference solution* meskipun menggunakan *mesh* paling kasar. Namun yang cukup mengejutkan adalah hasil P2-2-QS0,5 dan P3-3-QS0,5 semakin menjauhi *reference solution* ketika diperhalus, atau dengan kata lain, hasil-hasil P2-2-QS0,5 dan P3-3-QS0,5 konvergen ke suatu nilai yang sekitar 28% lebih tinggi dari *reference solution*. Kemungkinan hal ini terjadi karena pada MEH-K 3D *solids* membutuhkan elemen ke arah ketebalan *spherical shell* yang lebih banyak dalam membangun *shape function* Kriging. Gambar deformasi *spherical shell* dengan MEH-K P3-3-QS0,5 untuk *mesh* medium terlihat pada Gambar 7.

Tabel 3. Perpindahan *spherical shell* pada *node* ujung bawah yang dinormalkan terhadap *reference solution*

Jumlah Elemen	Perpindahan pada <i>Node</i> Ujung Bawah yang Dinormalkan		
	P1-1-QS0,5	P2-2-QS0,5	P3-3-QS0,5
412	0,0447	0,9031	1,0712
1372	0,2250	1,0559	1,2017
4590	0,4110	1,2750	1,2761
Note : Reference Solution = 7,634E-5			



Gambar 7. Visualisasi deformasi *spherical shell* dengan MEH-K P3-3-QS0,5 *mesh* medium tampak bawah

4.3. Twisted Beam

Benchmark problem selanjutnya dari MacNeal dan Harder (1985), yaitu *twisted beam* (Gambar 8). *Twisted beam* merupakan sebuah *beam* yang diputar pada arah panjangnya dari ujung ke ujung lainnya sebesar 90°. *Twisted beam* diberi *in-plane* dan *out-plane surface traction* sebesar total 1 satuan pada sisi ujung benda. Menurut MacNeal dan Harder (1985), besar perpindahan pada *node* yang mengalami *in-plane surface traction* adalah 0,005424 dan *out-plane surface traction* adalah 0,001754.



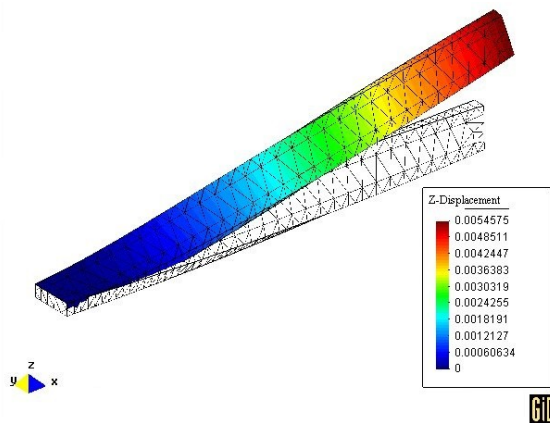
Material isotropik
Modulus Young, $E = 29.000.000$
Poisson's ratio, $\nu = 0,22$
Panjang 12 satuan
Lebar 1,1 satuan; Tebal 0,32 satuan

Gambar 8. Twisted beam (MacNeal dan Harder, 1985)

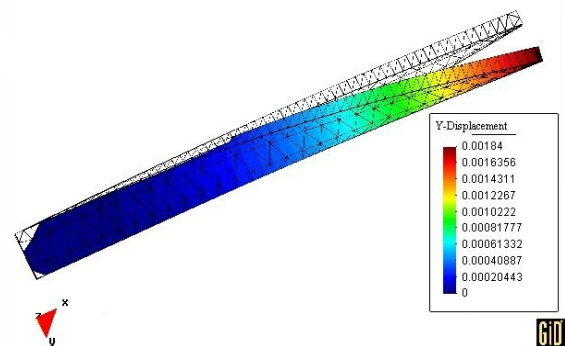
Hasil perpindahan P2-2-QS0,5 dan P3-3-QS0,5 dengan *mesh* medium sudah sangat dekat dengan *reference solution* terlihat pada Tabel 4. Hasil MEH-K jauh lebih baik daripada MEH konvensional. Seperti pada hasil *benchmark problem* sebelumnya, hasil MEH-K terlihat konvergen pada nilai yang sedikit lebih tinggi dari *reference solution* yang dipakai. Visualisasi perpindahan *twisted beam* dapat terlihat pada Gambar 9 dan Gambar 10.

Tabel 4. Perpindahan *twisted beam* yang dinormalkan terhadap *reference solution*

Jumlah Elemen	<i>In-Plane Surface Traction</i>			<i>Out-Plane Surface Traction</i>		
	Perpindahan z yang Dinormalkan			Perpindahan y yang Dinormalkan		
	P1-1-QS0,5	P2-2-QS0,5	P3-3-QS0,5	P1-1-QS0,5	P2-2-QS0,5	P3-3-QS0,5
114	0,164	0,339	0,785	0,182	0,687	0,878
945	0,360	1,009	1,006	0,519	1,050	1,049
7192	0,647	1,021	1,019	0,747	1,052	1,050
Note : Reference Solution = 0,005424				Reference Solution = 0,001754		



Gambar 9. Visualisasi perpindahan z (*in-plane*) *twisted beam* dengan MEH-K P3-3-QS0,5 *mesh* medium



Gambar 10. Visualisasi perpindahan y (*out-plane*) *twisted beam* dengan MEH-K P3-3-QS0,5 *mesh* medium

5. KESIMPULAN

Hasil-hasil pengujian memperlihatkan bahwa MEH-K 3D *solids* dapat memberikan solusi yang lebih akurat dan distribusi tegangan yang halus pada *mesh* yang sederhana bila dibandingkan dengan MEH konvensional yang mana dipakai oleh program komersial. Terlihat pada hasil pengujian, MEH-K 3D *solids* dapat menyelesaikan masalah dekat *reference solution* cukup hanya dengan polinom kuadratik dan *mesh* sederhana. Ini

berbeda pada MEH konvensional yang mana perlu mengubah struktur *mesh* untuk mencapai nilai yang akurat.

Namun aplikasi MEH-K 3D *solids* pada benda yang tipis seperti *shell* hasilnya kurang baik oleh karena *shape function* Kriging hanya dibangun hanya pada arah panjang dan lebar benda, maka *meshing* benda perlu menambahkan jumlah elemen ke arah ketebalan benda. Selain itu ada kecenderungan MEH-K 3D *solids* ini konvergen pada hasil yang lebih besar sekitar 5% dari solusi seharusnya. Ini karena MEH-K 3D *solids* bersifat *non-conforming*, karena hasil interpolasi Kriging pada perbatasan dua elemen yang bersebelahan tidak sama. Diperlukan penelitian lanjutan untuk memperbaiki MEH-K 3D *solids* agar *conforming*.

6. UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini sebagian dibiayai dengan dana penelitian dari Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat, Universitas Kristen Petra, Surabaya. Untuk itu penulis berterima kasih atas hibah dana penelitian yang diperoleh.

7. DAFTAR PUSTAKA

Cook, Robert D., Malkus, David S., Plesha, Michael E., dan Witt, Robert J. (2002). *Concepts and applications of finite element analysis* (4th ed.). Canada: John Wiley & Sons, Inc.

Gu, L. (2003). Moving Kriging interpolation and element-free Galerkin method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56, 1-11.

Kanok-Nukulchai, W., dan Wong, F. T. (2008). Rethinking of Shape Function Employment in FEM. *Slide presented at the meeting of Eleventh East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering & Construction (EASEC-11)*, Taipei, Taiwan.

MacNeal, R. H., dan Harder, R. L. (1985). A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1, 3-20.

Olea, R. A. (1999). *Geostatistics for engineers and earth scientists*. Boston: Kluwer Academic Publishers. Retrieved from http://books.google.co.id/books/about/Geostatistics_for_Engineers_and_Earth_Sc.html?id=bKoD2mM0RHUC&redir_esc=y

Plengkhom, K., dan Kanok-Nukulchai, W. (2005). An enhancement of finite element methods with moving Kriging shape functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2, 451-475.

Pudjisuryadi, P. (2002). Introduction to Meshless Local Petrov-Galerkin Method. *Dimensi Teknik Sipil*, 4, 112-116.

Tongsuk, P., dan Kanok-Nukulchai, W. (2004). Further investigation of element-free Galerkin method using moving Kriging interpolation. *International Journal of Computational Methods*, 01(02), 345-365. doi:10.1142/S0219876204000162

Wong, F. T. (2009). *Kriging-based finite element method for analyses of plate and shells*. (Unpublished doctoral dissertation). Bangkok, Thailand: Asian Institute of Technology.

Wong, F. T., Christabel, Y., Pudjisuryadi, P., dan Kanok-Nukulchai, W. (2015). Testing of the Kriging-based finite element to shell structures with varying thickness. *Procedia Engineering*, 125, (pp. 843-849). doi: 10.1016/j.proeng.2015.11.051

Wong, F. T., dan Syamsoeyadi, H. (2011). Kriging-based Timoshenko beam element for static and free vibration analyses. *Civil Engineering Dimension*, 13(1), 42-49. Doi:10.9744/ced.13.1.42-49

Wong, F. T., dan Kanok-Nukulchai, W. (2006a). Kriging-based finite element method for analyses of Reissner-Mindlin plates. *Proceedings of the Tenth East-Asia Pacific Conference on Structural Engineering and Construction, Emerging Trends: Keynote Lectures and Symposia*, (pp. 509–514). Bangkok, Thailand: Asian Institute of Technology.

Wong, F. T., dan Kanok-Nukulchai, W. (2006b). On alleviation of shear locking in the Kriging-based finite element method. *Proceeding of International Civil Engineering Conference "Towards Sustainable Engineering Practice"* (pp. 39-47). Surabaya, Indonesia: Petra Christian University.

Wong, F. T., dan Kanok-Nukulchai, W. (2008). A Kriging-based finite element method for analyses of shell structures. *Proceedings of the Eighth World Congress on Computational Mechanics and the Fifth European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering* (p. a1247). Venice: IACM and ECCOMAS.

Wong, F. T., dan Kanok-Nukulchai, W. (2009). On the convergence of the Kriging-based finite element method. *International Journal of Computational Methods*, 06(01), 93–118. doi:10.1142/S0219876209001784