

# STUDI KEAKURATAN DAN KEKONVERGENAN METODE ELEMEN HINGGA BERBASIS KRIGING DAN KONVENSIONAL

Wong Foek Tjong <sup>1</sup>, Kristofer Widjaja <sup>2</sup>, Richo Michael Soetanto <sup>3</sup>

## ABSTRAK

Metode elemen hingga (MEH) saat ini merupakan metode numerik yang digunakan secara luas dalam bidang teknik dan ilmu pengetahuan. Sebagai alternatif MEH konvensional, akhir-akhir ini terdapat usulan MEH jenis baru yang dinamakan metode elemen hingga berbasis Kriging (MEH-K). Dengan MEH-K, seorang analis struktur dapat menggunakan *mesh* yang tersusun dari elemen yang paling sederhana, yaitu elemen segitiga tiga *node*, namun tetap dapat memperoleh hasil yang akurat dan halus distribusi gradiennya. Dalam makalah ini disajikan studi keakuratan dan kekonvergenan metode baru ini dibandingkan dengan MEH konvensional. Studi dilakukan dalam konteks masalah linier-elastik tegangan bidang. Elemen yang ditinjau adalah elemen segitiga dengan basis polinom linier, kuadratik, dan kubik. Studi dilakukan secara numerik dengan melakukan pengujian pada dua masalah, yaitu balok kantilever dan pelat siku yang memiliki titik singularitas tegangan. Ukuran yang dipakai dalam menilai keakuratan dan kekonvergenan adalah energi regangan struktur. Hasil studi menunjukkan bahwa untuk elemen dengan basis linier, keakuratan MEH-K lebih baik daripada MEH konvensional, namun untuk elemen kuadratik dan kubik, hasil-hasil MEH konvensional lebih baik daripada MEH-K.

**KATA KUNCI:** metode elemen hingga berbasis Kriging, elemen segitiga, basis polinom, tegangan bidang, kekonvergenan, singularitas tegangan

## ABSTRACT

Finite element method is currently a widely used numerical method in engineering and science. Recently a new type of FEM, referred to as Kriging-based finite element method (K-FEM), has been proposed as an alternative to the conventional FEM. With the K-FEM, accurate results and smooth gradient of the field variables can be obtained even using a mesh composed of the simplest elements, i.e. three-noded triangular elements. This paper presents a study on the accuracy and convergence of the K-FEM in comparison to the conventional FEM. The study is carried out in the framework of plane stress problem. The elements considered are triangular elements with linear, quadratic, and cubic polynomial bases. The study is carried out by performing numerical tests on two plane stress problems, namely a cantilever beam and a L-shaped plate containing a of singular stress point. The structural strain energy norm is used to assess the accuracy and convergence. The results show that for the elements with linear basis, the accuracy of the K-FEM is better than that of the conventional FEM. In contrast, for the elements with quadratic and cubic bases, the results obtained using the conventional FEM is better than those obtained using the K-FEM.

**KEYWORDS:** Kriging-based finite element method, triangular elements, polynomial basis, plane stress, convergence, singular stress

---

<sup>1</sup> Dosen Program Studi Magister Teknik Sipil, Universitas Kristen Petra, Surabaya, [wftjong@petra.ac.id](mailto:wftjong@petra.ac.id)

<sup>2,3</sup> Mahasiswa Program Studi Magister Teknik Sipil, Universitas Kristen Petra, Surabaya,

<sup>2</sup>[kristofer\\_wd@hotmail.com](mailto:kristofer_wd@hotmail.com), <sup>3</sup>[hore\\_yippie@yahoo.co.id](mailto:hore_yippie@yahoo.co.id)

# STUDI KEAKURATAN DAN KEKONVERGENAN METODE ELEMEN HINGGA BERBASIS KRIGING DAN KONVENSIONAL

Wong Foek Tjong, Kristofer Widjaja, Richo Michael Soetanto

## 1. PENDAHULUAN

Metode elemen hingga (MEH) saat ini merupakan metode numerik yang digunakan secara luas dalam bidang teknik dan ilmu pengetahuan. Berbagai *software* komersial yang bekerja berdasarkan MEH telah dikembangkan, baik yang bersifat umum (multifungsi) seperti Nastran, Ansys, Abaqus, Adina, maupun yang bersifat khusus untuk analisis struktur dalam bidang teknik sipil seperti Sap, GT Strudl, Midas, Stand7, dan Sans. Meskipun MEH saat ini sudah mapan (*well established*), penelitian-penelitian dalam MEH dan metode numerik alternatif lainnya terus dilakukan dengan tujuan untuk meningkatkan keakuratan and kapabilitas dari MEH. Penelitian-penelitian ini telah menghasilkan berbagai varian baru MEH seperti *extended finite element method* [1], [2], *smoothed finite element method* [3], *finite elements with continuous nodal stress* [4], [5], dan *Kriging-based finite element method* [6]. Makalah ini membahas varian MEH yang disebutkan terakhir, yaitu metode elemen hingga berbasis Kriging (MEH-K).

MEH-K pertama kali diusulkan oleh Plengkhom dan Kanok-Nukulchai [6] sebagai suatu generalisasi dari MEH konvensional. Generalisasi ini dilakukan dengan melibatkan *nodes* di sekeliling suatu elemen hingga dalam membangun fungsi interpolasi untuk variabel yang dicari. Fungsi interpolasi yang dipakai bukan polinom seperti biasanya pada MEH konvensional, melainkan interpolasi Kriging, suatu teknik interpolasi yang dikenal baik dalam bidang geologi dan pertambangan. MEH-K pertama kali dikembangkan untuk masalah tegangan/regangan bidang [6], kemudian dikembangkan untuk masalah balok [7], pelat lentur [8]–[10] dan cangkang [11], [12]. Konsep dasar MEH-K telah dipaparkan dalam makalah konferensi [13], [14], majalah ilmiah [15] maupun jurnal ilmiah [16], [17]. Keunggulan varian MEH ini adalah fungsi basis polinom berderajat tinggi dapat diikuti sertakan dalam elemen tanpa memerlukan tambahan *node* dalam elemen. Karena itu, meskipun suatu analisis struktur dilakukan dengan menggunakan *mesh* sederhana, yaitu *mesh* dengan elemen segitiga tiga *node* untuk masalah 2D atau elemen tetrahedron empat *node* untuk masalah 3D, namun hasil yang diperoleh sangat akurat dan gradien dari variabel yang dicari (misalnya tegangan) cukup halus meskipun tanpa melakukan proses penghalusan gradien.

Kekurangan dari MEH-K adalah fungsi interpolasi yang dibangun “*element-by-element*” tidak kontinu sepanjang perbatasan antar elemen. Efek dari ketidakkontinuan ini pada kemampuan MEH-K untuk menghasilkan solusi yang konvergen telah diteliti oleh Wong dan Kanok-Nukulchai [18]. Didapati bahwa solusi MEH-K dengan parameter Kriging yang tepat konvergen menuju solusi analitik. Meskipun demikian laju kekonvergenan MEH-K dapat sangat dipengaruhi oleh ketidakkontinuan tersebut. Kekurangan lainnya adalah ongkos komputasi yang mahal karena fungsi interpolasi tidak dinyatakan secara

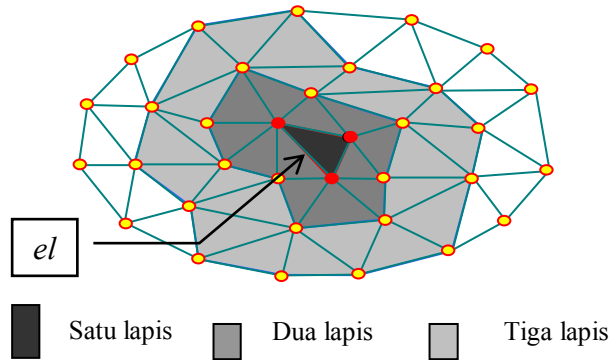
eksplisit, melainkan dibentuk untuk setiap elemen ketika melakukan komputasi (yaitu saat eksekusi program MEH-K).

Keakuratan dan kekonvergenan MEH-K telah dipaparkan dalam makalah-makalah sebelum ini [6], [18], namun belum jelas bagaimana keakuratan dan kekonvergenan MEH-K bila dibandingkan dengan MEH konvensional yang setara. Yang dimaksud 'setara' di sini adalah MEH dengan derajat fungsi basis dan jumlah derajat kebebasan yang sama. Tujuan dari makalah ini adalah melakukan studi keakuratan dan kekonvergenan MEH-K dibandingkan dengan MEH konvensional. Studi dilakukan dalam konteks masalah linier-elastik tegangan bidang. Elemen yang ditinjau adalah elemen segitiga dengan basis polinom linier, kuadratik, dan kubik. Studi dilakukan dengan melakukan pengujian numerik pada dua masalah, yaitu masalah balok kantilever tegangan bidang dan pelat siku yang memiliki titik singularitas tegangan. Norma yang dipakai dalam menilai keakuratan dan kekonvergenan adalah energi regangan struktur. Hasil studi menunjukkan bahwa untuk elemen-elemen dengan basis polinom linier hasil-hasil MEH-K lebih baik daripada MEH konvensional, namun sebaliknya untuk elemen-elemen dengan basis polinom kuadratik dan kubik, hasil-hasil MEH konvensional lebih baik.

## 2. KONSEP DASAR METODE ELEMEN HINGGA BERBASIS KRIGING

Tinjau suatu daerah 2D yang telah didiskretisasi menjadi elemen-elemen segitiga tiga *node* seperti diilustrasikan pada Gambar 1. Dalam MEH konvensional, variabel yang tidak diketahui diaproksimasi dengan fungsi interpolasi *piecewise* linier. Fungsi linier untuk setiap elemen dibangun dari *shape function* linier pada titik-titik nodal pada elemen saja. Dalam MEH-K, fungsi interpolasi dibangun bukan hanya berdasarkan titik-titik nodal pada elemen saja, melainkan juga berdasarkan titik-titik yang berada di sekeliling elemen. Titik-titik luar elemen ini bisa terdiri atas titik-titik sampai lapis pertama, atau kedua, atau lebih lagi di luar elemen. Ini diilustrasikan pada Gambar 1 untuk elemen nomor *e*. Daerah yang mencakup semua titik yang terlibat dalam membangun fungsi interpolasi ini, yang dibentuk dengan lapisan-lapisan elemen di sekitar elemen yang sedang ditinjau, disebut kawasan titik pengaruh, DOI (*domain of influencing nodes*). Dengan mengkombinasikan fungsi interpolasi untuk semua elemen, variabel yang tidak diketahui diaproksimasi oleh fungsi-fungsi interpolasi itu secara *piecewise*.

Interpolasi yang melibatkan *nodes* pada posisi sembarang tersebut dimungkinkan dengan mengadopsi interpolasi Kriging, suatu teknik geostatistik untuk interpolasi dalam geologi dan pertambangan [19], [20]. Istilah Kriging ini berasal dari nama insinyur pertambangan Afrika Selatan, D.G. Krige. Untuk dapat membangun interpolasi ini diperlukan penentuan dua macam fungsi, yaitu fungsi basis polinom dan fungsi korelasi. Basis polinom yang dapat dipakai bisa fungsi linier atau fungsi polinom berderajat lebih tinggi. Dalam MEH-K untuk analisis pelat lentur [8], [10] dan cangkang [11] telah dipakai fungsi polinom berderajat empat (polinom kuartik). Salah satu fungsi korelasi yang banyak digunakan adalah fungsi korelasi Gauss. Namun dalam MEH-K terdapat fungsi korelasi lain yang terbukti efektif, yaitu fungsi *quartic spline* [18].



Gambar 1 Elemen hingga  $el$  dengan lapisan-lapisan elemen di sekelilingnya, yang membentuk kawasan titik berpengaruh (*domain of influencing nodes*, DOI)

Dalam makalah ini fungsi polinom yang digunakan dalam membangun interpolasi Kriging berkisar dari fungsi linier sampai dengan fungsi kubik. Jumlah lapisan elemen (termasuk elmen itu sendiri) berkisar dari satu sampai dengan tiga. Fungsi korelasi yang digunakan adalah *quartic spline*.

### 3. PERUMUSAN ELEMEN HINGGA UNTUK MASALAH TEGANGAN/REGANGAN BIDANG

Bentuk variasional persamaan penentu (*governing equation*) untuk masalah tegangan/regangan bidang pada struktur dengan domain dalam ruang dua dimensi  $\Omega$  dan permukaan  $\Gamma$  adalah

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS \quad (1)$$

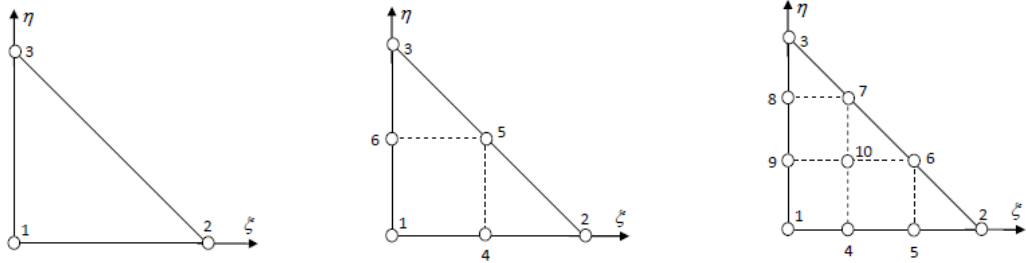
di mana  $\boldsymbol{\sigma}$  adalah vektor tegangan dua dimensi,  $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy}\}^T$ ,  $\mathbf{b}$  adalah vektor *body force*,  $\mathbf{b} = \{b_x \quad b_y\}^T$ , dan  $\mathbf{t}$  adalah vektor gaya traksi pada permukaan,  $\mathbf{t} = \{t_x \quad t_y\}^T$ . Lambang  $\delta$  menyatakan operator variasional. Lambang  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  berarti variasi dari vektor regangan, yaitu  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\delta \varepsilon_{xx} \quad \delta \varepsilon_{yy} \quad \delta \gamma_{xy}\}$ , yang selaras dengan variasi dari vektor perpindahan  $\delta \mathbf{u}^T = \{\delta u \quad \delta v\}$ . Lambang  $\Gamma_t$  berarti permukaan yang dikenai gaya traksi. Integral dengan diferensial  $dV$  berarti integral volume, sedangkan integral dengan diferensial  $dS$  berarti integral permukaan.

Dalam MEH, termasuk MEH-K, domain  $\Omega$  dibagi-bagi menjadi menjadi elemen-elemen. Misalkan domain  $\Omega$  dibagi menjadi  $N_{el}$  elemen segitiga dan  $N$  nodes. Fungsi perpindahan  $\mathbf{u}$  dalam setiap element diaproksimasi oleh fungsi interpolasi berbentuk

$$u(x, y) \cong \sum_{i=1}^n N_i(x, y) u_i \quad v(x, y) \cong \sum_{i=1}^n N_i(x, y) v_i \quad (2)$$

di mana  $N_i(x, y)$  adalah *shape function* untuk *node*  $i$ ,  $u_i$  dan  $v_i$  adalah komponen-komponen vektor perpindahan, masing-masing dalam arah  $x$  dan  $y$ , pada *node*  $i$ . Jumlah *node*  $n$  bergantung kepada derajat interpolasi yang digunakan. Titik-titik nodal untuk elemen segitiga berderajat linier, kuadratik, dan kubik (dengan sistem koordinat natural  $\xi$  dan  $\eta$ ) diperlihatkan pada Gambar 2. Rumusan *shape function* untuk elemen-elemen

segitiga tersebut dapat di lihat pada buku-buku teks metode elemen hingga seperti [21]–[24].



a. Elemen segitiga linier

b. Elemen segitiga kuadratik

c. Elemen segitiga kubik

Gambar 2 Elemen segitiga dengan berbagai derajat fungsi interpolasi: a. linier, b. kuadratik, dan c. kubik

Dalam MEH-K, *shape function* yang digunakan bukanlah murni polinom, melainkan *shape function* yang didalamnya mengandung polinom, yang dibangun dengan konsep interpolasi Kriging seperti diuraikan pada Pasal 2. Untuk membangun *shape function* Kriging ini diperlukan titik-titik nodal yang jumlahnya,  $n$ , bergantung kepada kandungan polinom di dalam interpolasi Kriging. Berbeda dengan MEH konvensional, titik-titik untuk membangun fungsi interpolasi ini lokasinya tidak di dalam elemen seperti terlihat pada Gambar 2, melainkan titik-titik sudut segitiga elemen itu serta titik-titik pada lapisan elemen-elemen di sekitar elemen itu. Dari pengalaman penulis didapatkan bahwa jumlah lapisan elemen yang perlu dilibatkan untuk membangun interpolasi Kriging dengan fungsi basis linier adalah satu lapis, untuk fungsi basis kuadratik dua lapis, dan untuk fungsi basis kubik tiga lapis.

Mengikuti prosedur perumusan MEH konvensional [21]–[24], persamaan diskrit keseimbangan elemen dapat diperoleh dari persamaan (1) dengan domain elemen  $\Omega^e$  dan persamaan (2). Persamaan keseimbangan itu adalah

$$\mathbf{k}^e \mathbf{d}^e = \mathbf{f}^e, \quad e = 1, \dots, N_{el} \quad (3)$$

di mana  $\mathbf{k}^e$  adalah matriks kekakuan, berukuran  $2n \times 2n$ , yang diberikan oleh

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (4)$$

$\mathbf{d}^e$  adalah vektor perpindahan titik nodal, berukuran  $2n \times 1$ , didefinisikan sebagai

$$\mathbf{d}^e = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \dots \quad u_n \quad v_n\}^T \quad (5)$$

dan  $\mathbf{f}^e$  adalah vektor gaya nodal ekuivalen, berukuran  $2n \times 1$ , yang diberikan oleh

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS \quad (6)$$

Dalam persamaan (6) matriks  $\mathbf{N}$  adalah matriks dari *shape function* elemen sbb.

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & N_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

*Shape function* di sini bergantung kepada jenis elemen yang digunakan. Untuk MEH-K, *shape function*-nya adalah *shape function* Kriging yang tidak dinyatakan dalam rumus secara eksplisit, melainkan nilai-nilainya pada titik-titik tertentu (biasanya pada *integration sampling points*) dihitung dengan memecahkan sistem persamaan Kriging (lihat [16], [18]) pada waktu eksekusi program.

Dalam persamaan (4), matriks **B** adalah matriks regangan-perpindahan yang diberikan oleh

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & \cdots & N_{n,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & \cdots & N_{n,x} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Subskrip dalam persamaan (8) ini menyatakan turunan parsial (terhadap variabel  $x$  atau  $y$ ). Matriks **E** adalah matriks elastisitas untuk masalah tegangan/regangan bidang. Untuk material yang isotropik dengan modulus elastisitas bahan  $E$  dan rasio Poisson  $\nu$ ,

$$\mathbf{E} = \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}^2} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \bar{\nu})/2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

di mana

$$\bar{E} = \begin{cases} E \\ \frac{E}{1 - \nu^2} \end{cases} \quad \text{dan} \quad \bar{\nu} = \begin{cases} \nu \\ \frac{\nu}{1 - \nu} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{untuk tegangan bidang} \\ \text{untuk regangan bidang} \end{matrix} \quad (10)$$

Persamaan diskrit keseimbangan struktur, yaitu

$$\mathbf{K}\mathbf{D} = \mathbf{F} \quad (11)$$

di mana **K** adalah matriks kekakuan global, berukuran  $2N \times 2N$ , **D** adalah vektor perpindahan titik nodal global, berukuran  $2N \times 1$ , dan **F** adalah vektor gaya ekuivalen global, juga berukuran  $2N \times 1$ . Persamaan keseimbangan global ini diperoleh dengan prosedur perakitan (*assembly*) persamaan keseimbangan elemen, persamaan (3). Dalam MEH-K proses perakitan ini melibatkan semua *node* dalam kawasan titik pengaruh untuk setiap elemen, bukan hanya *node* dalam elemen.

Untuk suatu *problem domain* yang dibagi-bagi menjadi elemen-elemen berukuran sama dan problem itu memiliki solusi yang *smooth*, kesalahan aproksimasi MEH konvensional diukur dalam energi regangan, secara teoritis dapat dituliskan sbb. [22]

$$E - E_h \leq ch^{2k} \quad (12)$$

di mana  $E$  adalah energi regangan eksak,  $E_h$  adalah energi regangan dari hasil analisis dengan MEH,  $h$  adalah ukuran karakteristik elemen,  $k$  adalah derajat yang mana polinom lengkap, dan  $c$  adalah suatu konstanta yang tidak bergantung kepada  $h$ . Bila suatu masalah tegangan/regangan bidang yang solusinya cukup *smooth* (misalnya tidak terdapat singularitas tegangan) di-mesh dengan ukuran elemen yang sama, misalnya dengan elemen segitiga linier ( $k=1$ ), maka secara teoritis orde konvergensinya akan dua. Menarik untuk meneliti melalui contoh-contoh numerik apakah teori ini juga berlaku untuk MEH-K.

Perumusan alternatif untuk kesalahan aproksimasi MEH konvensional dinyatakan dalam jumlah derajat kebebasan (DOF, *degrees of freedom*) struktur adalah sbb.

$$E - E_h \leq c_d (\text{DOF})^{-k} \quad (13)$$

di mana  $c_d$  adalah suatu konstanta yang tidak bergantung kepada DOF dan yang pada umumnya berbeda dari konstanta  $c$  dalam persamaan (12).

#### 4. PENGUJIAN NUMERIK DAN DISKUSI

Pengujian numerik dilakukan untuk menilai keakuratan dan kekonvergenan MEH-K bila dibandingkan dengan MEH yang setara, yaitu elemen hingga yang memiliki derajat fungsi basis dan derajat kebebasan yang sama. Pengujian dilakukan dengan meninjau dua macam masalah, yaitu balok kantilever tegangan bidang dan pelat berbentuk L. Pada masalah pertama solusi eksak balok adalah polinom berderajat tiga yang tentu saja *smooth*, sehingga diharapkan orde konvergensinya cocok dengan orde konvergensi teoritis. Pada masalah kedua, solusinya mengandung singularitas tegangan pada salah satu titik sudut sehingga solusinya tidak *smooth*. Dapat diharapkan orde konvergensinya akan di bawah orde konvergensi kalau seandainya solusinya *smooth* [22].

Elemen yang diuji meliputi elemen segitiga berbasis Kriging dengan fungsi basis linier dan dua lapis elemen (P1-2-QS), fungsi basis kuadratik dan dua lapis elemen (P2-2-QS), dan fungsi basis kubik dan tiga lapis elemen (P3-3-QS). Fungsi korelasi yang digunakan dalam elemen-elemen berbasis Kriging ini semuanya adalah *quartic spline* (QS) dengan parameter korelasi adaptif berfaktor  $f = 0.5$  (lihat [8], [18]). Elemen-elemen ini akan dibandingkan dengan elemen-elemen segitiga linier, kuadratik, dan kubik konvensional, masing-masing dinamakan CST (*constant strain triangle*), LST (*linear strain triangle*), dan QST (*quadratic strain triangle*). Dalam pengujian ini tidak dipakai elemen berbasis Kriging dengan fungsi basis linier dan satu lapis elemen (P1-1-QS) karena elemen ini identik dengan CST.

##### 4.1. Balok Kantilever Tegangan Bidang

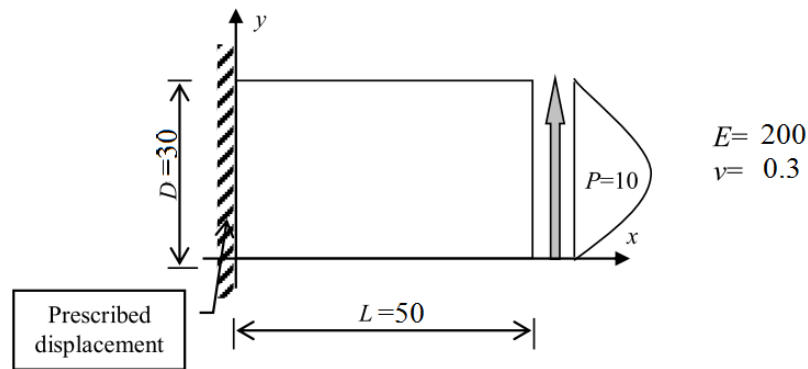
Masalah yang ditinjau adalah balok kantilever yang dibebani beban berdistribusi parabola pada ujung kanan balok seperti terlihat pada Gambar 3, yang dimodelkan sebagai masalah tegangan bidang. Masalah ini merupakan *benchmark problem* yang banyak dipakai untuk menguji berbagai perumusan elemen hingga dan metode numerik lainnya untuk masalah tegangan bidang (sebagai contoh lihat [25]). Solusi analitis

perpindahan untuk balok ini diberikan oleh Timoshenko ([26] seperti dikutip pada [25]), yaitu

$$u = -\frac{P}{6EI} \left(y - \frac{D}{2}\right) [3x(2L - x) + (2 + \nu)y(y - D)] \quad (14a)$$

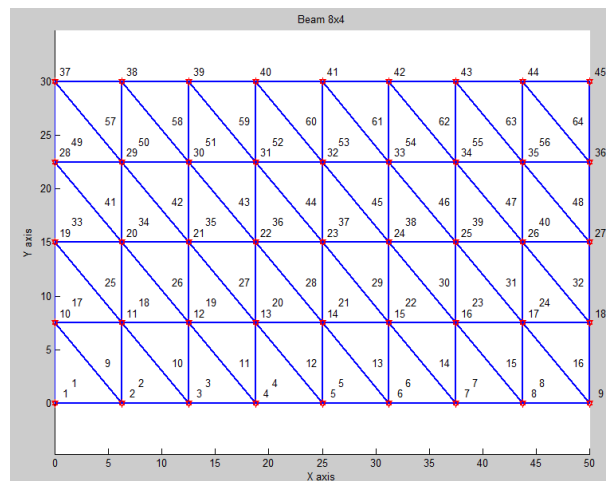
$$v = \frac{P}{6EI} \left[ x^2(3L - x) + 3\nu(L - x)\left(y - \frac{D}{2}\right)^2 + \frac{4 + 5\nu}{4} D^2 x \right] \quad (14b)$$

di mana  $I = D^3/12$  dan tebal balok di anggap satu unit.



Gambar 3 *Cantilever beam* dengan *prescribed displacement* di ujung kiri

Balok kantilever ini dimodelkan dengan berbagai ukuran *mesh* dari yang paling kasar sampai yang cukup halus, yaitu *mesh* 2x1, 4x2, 8x4, dan 16x8. Permodelan struktur dengan *mesh* 8x4 diperlihatkan pada Gambar 4. Supaya model MEH yang digunakan selaras dengan model eksaknya, maka pada ujung kiri diberikan *prescribed displacement* mengikuti solusi analitis yang diberikan oleh persamaan (14a) dan (14b).



Gambar 4 Permodelan *cantilever beam* menggunakan *mesh* 8x4

Hasil-hasil analisis dinyatakan dalam energi regangan dan kesalahan relatif energi regangan (dalam %) ditampilkan pada Tabel 1. Yang dimaksud kesalahan relatif di dalam tabel ini adalah

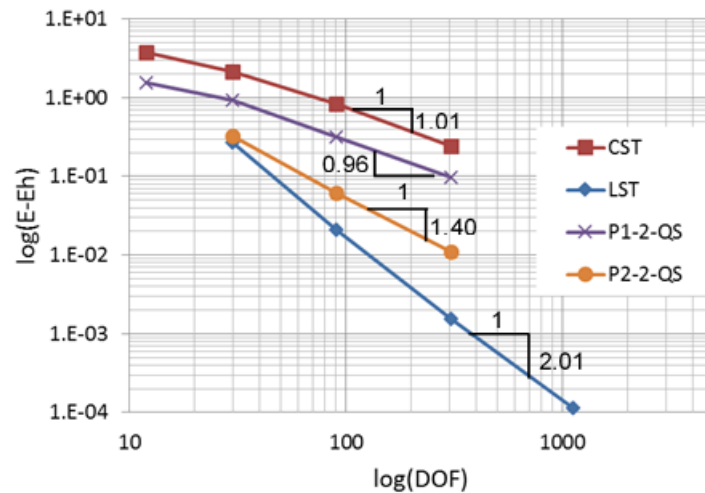
$$\text{Kesalahan relatif} = \frac{E - E_h}{E} \times 100\% \quad (15)$$

Dalam Tabel 1 ini untuk analisis dengan P2-2-QS dan P3-3-QS dimulai dengan *mesh* yang lebih halus, yaitu masing-masing *mesh* 4x2 dan 8x4, karena didapati untuk *mesh* yang lebih kasar interpolasi Kriging tidak dapat berjalan karena persyaratan jumlah *node* dalam kawasan titik pengaruh beberapa elemen tidak dipenuhi. Kesalahan energi regangan hasil-hasil analisis dengan elemen hingga berfungsi basis linier (CST dan P1-2-QS) dan kuadratik (LST dan P2-2-QS) diplot pada Gambar 5 untuk memperlihatkan orde dari laju konvergensi masing-masing elemen tersebut. Hasil-hasil untuk elemen dengan fungsi basis kubik tidak diikutsertakan dalam Gambar 5 karena tidak relevan untuk menilai laju konvergensinya (hasil-hasilnya eksak meskipun dengan *mesh* paling kasar).

Tabel 1 Hasil-hasil energi regangan balok kantilever dan kesalahan relatifnya untuk berbagai jenis elemen dan berbagai ukuran *mesh*

<i>Element Type</i>	<i>Mesh</i>	<i>DOF</i>	<i>Strain Energy</i>	<i>Relative error (%)</i>
CST	2x1	12	2.1992	62.91%
	4x2	30	3.7826	36.21%
	8x4	90	5.1044	13.92%
	16x8	306	5.6889	4.06%
LST	2x1	30	5.6572	4.59%
	4x2	90	5.9086	0.35%
	8x4	306	5.9281	0.03%
	16x8	1122	5.9295	0.00%
QST	2x1	56	5.9296	0.00%
	4x2	182	5.9296	0.00%
	8x4	650	5.9296	0.00%
	16x8	2450	5.9296	0.00%
P1-2-QS	2x1	12	4.3912	25.94%
	4x2	30	4.9897	15.85%
	8x4	90	5.6127	5.35%
	16x8	306	5.8321	1.65%
P2-2-QS	4x2	30	5.6073	5.44%
	8x4	90	5.8685	1.03%
	16x8	306	5.9186	0.19%
P3-3-QS	8x4	90	5.9203	0.16%
	16x8	306	5.9368	0.12%

*Exact strain energy*= 5.9296



Gambar 5 Grafik kesalahan energi regangan vs. jumlah derajat kebebasan (dalam skala log-log) untuk balok kantilever yang dimodelkan dengan berbagai jenis elemen hingga

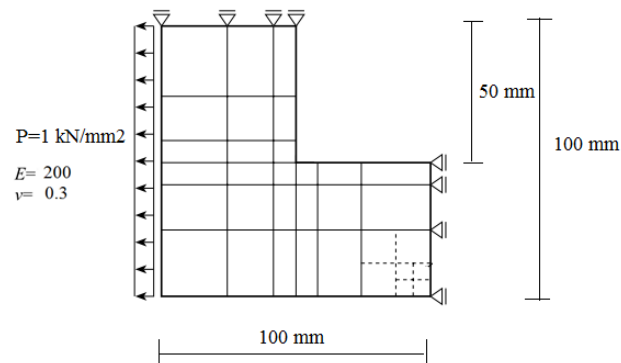
Tabel 1 menunjukkan bahwa hasil-hasil analisis adalah seperti yang diharapkan secara teoritis, yaitu: (1) hasil analisis konvergen untuk semua jenis elemen yang ditinjau, (2) untuk elemen berfungsi basis derajat lebih tinggi lebih akurat, dan (3) hasil-hasil dengan elemen berfungsi basis kubik eksak untuk QST dan sangat dekat dengan eksak untuk P3-3-QS. Elemen QST menghasilkan hasil yang eksak karena *exact displacement* dari balok kantilever itu adalah fungsi kubik yang sama dengan *interpolation function* pada QST. MEH-K dengan P3-3-QS tidak memberikan hasil yang persis eksak karena MEH-K bersifat *nonconforming*, yakni fungsi interpolasi Kriging tidak sepenuhnya kontinu pada sisi perbatasan antar-elemen (lihat [18] untuk penjelasan lebih rinci).

Dari Tabel 1 dan Gambar 5 terlihat bahwa untuk elemen linier, keakuratan MEH-K berbasis linier jauh lebih baik daripada MEH konvensional yang setara. Sebagai contoh untuk *mesh* 8x4 (DOF=90), kesalahan relatif MEH-K sekitar 5.4% sedangkan MEH konvensional 14%. Namun demikian laju konvergensi kesalahan energi regangan kedua elemen itu hampir sama, yaitu sekitar berorde sekitar satu, sangat dekat seperti yang diprediksi secara teoritis oleh persamaan (13).

Untuk elemen kuadratik yang setara, yaitu LST dan P2-2-QS, terlihat bahwa hasil-hasil LST lebih akurat daripada P2-2-QS. Sebagai contoh untuk pemodelan dengan DOF=90, kesalahan relatif hasil dari LST adalah 0.35% sedangkan dengan P2-2-QS kesalahannya 1.03%. Orde dari laju konvergensi elemen LST adalah seperti yang diprediksi teori, yaitu sangat dekat dengan dua, sedangkan orde konvergensi P2-2-QS cukup jauh dari dua, yaitu 1.40. Ini mungkin disebabkan karena fungsi interpolasi Kriging bukanlah murni polinom.

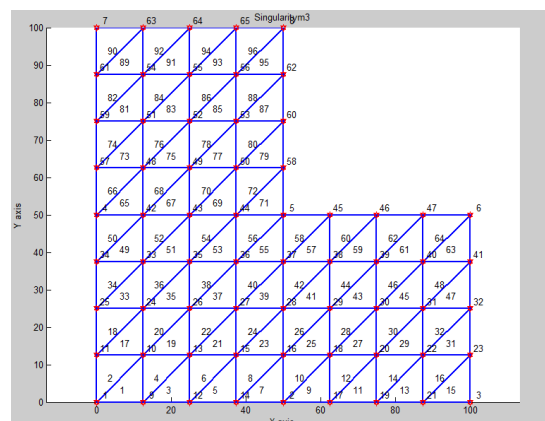
#### 4.2. Pelat Siku

Untuk mempelajari pengaruh singularitas terhadap kekonvergenan MEH-K dan MEH konvensional, maka elemen-elemen tersebut diuji dengan masalah pelat berbentuk siku (diambil dari [24]) seperti diperlihatkan pada Gambar 6.



Gambar 6 Pelat siku yang dibebani gaya tarik

Struktur pelat ini dimodelkan dengan *mesh* dengan berbagai ukuran, yaitu 1x1, 2x2, 4x4, dan 8x8. Sebagai contoh, Gambar 7 menunjukkan permodelan struktur dengan perumusan *mesh* 4x4. Energi regangan dari struktur dicari dan dibandingkan dengan hasil eksak sehingga dapat mengetahui seberapa besar tingkat kesalahannya dan bagaimana karakteristik konvergensinya.



Gambar 7 Permodelan pelat siku dengan *mesh* 4x4

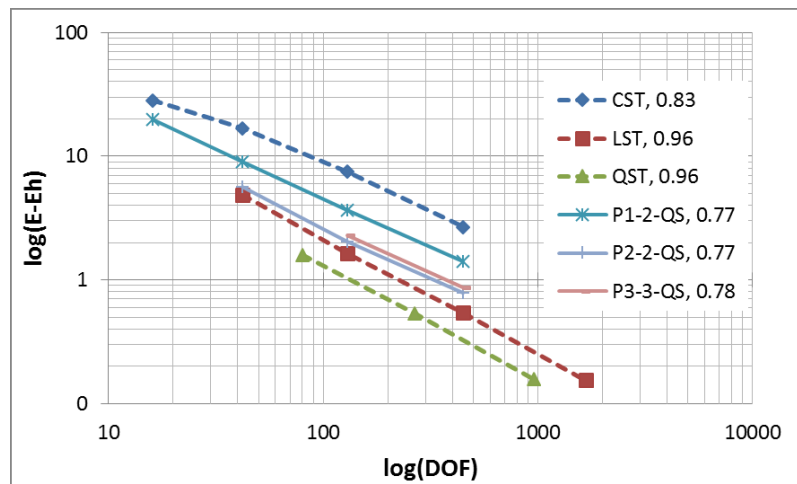
Hasil-hasil pengujian berupa energi regangan dan kesalahan relatifnya dapat didaftarkan pada Tabel 2. Sama seperti pada masalah balok sebelum ini, untuk analisis dengan MEH-K P2-2-QS dan P3-3-QS tidak bisa menggunakan *mesh* yang kasar, sehingga pengujian masing-masing dimulai dengan *mesh* 2x2 dan 4x4. Karena untuk masalah pelat siku ini tidak terdapat energi eksaknya, maka untuk referensi diambil energi regangan hasil dari analisis dengan *mesh* terhalus elemen QST. Hasil-hasil analisis dengan MEH konvensional seperti yang diharapkan, yaitu semakin halus *mesh* dan semakin tinggi derajat fungsi basis, semakin akurat hasil yang diperoleh. Untuk MEH-K terdapat hasil yang di luar harapan, yaitu keakuratan elemen dengan fungsi basis

kuadratik dan kubik hampir sama. Ini berarti peningkatan akurasi pada masalah yang terdapat singularitas tegangan tidak efektif dilakukan dengan hanya meningkatkan derajat fungsi basis, melainkan juga harus disertai peningkatan jumlah *node* seperti pada MEH konvensional.

Tabel 2 Hasil-hasil energi regangan pelat siku dan kesalahan relatifnya untuk berbagai jenis elemen dan berbagai ukuran *mesh*

<i>Element Type</i>	<i>Mesh</i>	<i>DOF</i>	<i>Strain Energy</i>	<i>Relative error (%)</i>
CST	1x1	16	49.3753	36.46%
	2x2	42	60.8383	21.71%
	4x4	130	70.2398	9.61%
	8x8	450	75.0376	3.44%
LST	1x1	42	72.8215	6.29%
	2x2	130	76.0708	2.11%
	4x4	450	77.1643	0.70%
	8x8	1666	77.5527	0.20%
QST	1x1	80	76.1202	2.04%
	2x2	266	77.1725	0.69%
	4x4	962	77.5502	0.20%
	8x8	3650	77.7079*	0.00%
P1-2-QS	1x1	16	57.8906	25.50%
	2x2	42	68.6911	11.60%
	4x4	130	74.0564	4.70%
	8x8	450	76.3021	1.81%
P2-2-QS	2x2	42	72.0127	7.33%
	4x4	130	75.6724	2.62%
	8x8	450	76.9216	1.01%
P3-3-QS	4x4	130	75.4348	2.93%
	8x8	450	76.8430	1.11%

\*Reference strain energy= 77.7079



Gambar 8 Grafik kesalahan energi regangan vs. jumlah derajat kebebasan (dalam skala log-log) untuk pelat siku yang dimodelkan dengan berbagai jenis elemen hingga. Angka-angka pada legend menunjukkan orde konvergensi berdasarkan dua *mesh* terhalus

Untuk melihat karakteristik konvergensi hasil-hasil analisis, grafik kesalahan energi regangan vs. jumlah DOF untuk berbagai elemen yang ditinjau diplot dalam skala log-log seperti yang diperlihatkan pada Gambar 8. Dari Gambar 8 dan Tabel 2 terlihat bahwa untuk DOF yang sama, elemen linier MEH-K sekitar dua kali lebih akurat daripada elemen linier konvensional. Namun untuk elemen kuadratik dan kubik MEH-K, keakuratannya masih kurang daripada elemen-elemen konvensional yang setara. Seperti yang diprediksi teori konvergensi MEH [22], orde konvergensi MEH maupun MEH-K jauh berkurang pada masalah ini karena adanya singularitas tegangan. Terlihat dari Gambar 8 bahwa orde konvergensi dari semua jenis elemen hampir sama. Orde konvergensi MEH konvensional sedikit lebih baik daripada MEH-K.

## 5. KESIMPULAN

Studi keakuratan dan konvergensi MEH-K dan MEH konvensional telah dilakukan dalam konteks masalah tegangan bidang. Hasil-hasil pengujian menunjukkan bahwa untuk elemen linier yang setara, hasil-hasil MEH-K sekitar dua kali lebih akurat daripada MEH konvensional, namun orde dari laju kekonvergenannya hampir sama. Untuk elemen kuadratik dan kubik yang setara, hasil-hasil MEH konvensional lebih akurat daripada MEH-K dan orde konvergensi MEH-K lebih rendah daripada MEH konvensional. Dalam masalah yang mengandung singularitas tegangan, orde konvergensi relatif tidak dapat ditingkatkan dengan menaikkan derajat polinom fungsi basis, baik dalam MEH konvensional maupun dalam MEH-K. Kemudahan utama MEH-K secara praktis adalah peningkatan akurasi dapat dilakukan tanpa mengubah *mesh*. Kelemahannya adalah tidak dapat mereproduksi hasil eksak karena bersifat *nonconforming*.

## 6. DAFTAR PUSTAKA

- [1] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko, "A finite element method for crack growth without remeshing," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 46, no. 1, pp. 131–150, 1999.
- [2] Y. Abdelaziz and A. Hamouine, "A survey of the extended finite element," *Comput. Struct.*, vol. 86, no. 11–12, pp. 1141–1151, 2008.
- [3] G. R. Liu, K. Y. Dai, and T. T. Nguyen, "A smoothed finite element method for mechanics problems," *Comput. Mech.*, vol. 39, no. 6, pp. 859–877, 2007.
- [4] Y. Yang, X. Tang, and H. Zheng, "A three-node triangular element with continuous nodal stress," *Comput. Struct.*, vol. 141, pp. 46–58, 2014.
- [5] X. H. Tang, C. Zheng, S. C. Wu, and J. H. Zhang, "A novel four-node quadrilateral element with continuous nodal stress," *Appl. Math. Mech. (English Ed.)*, vol. 30, no. 12, pp. 1519–1532, 2009.
- [6] K. Plengkhom and W. Kanok-Nukulchai, "An Enhancement of Finite Element Method with Moving Kriging Shape Functions," *Int. J. Comput. Methods*, vol. 02, no. 04, pp. 451–475, Dec. 2005.
- [7] F. T. Wong and H. Syamsoeyadi, "Kriging-based Timoshenko Beam Element for

- Static and Free Vibration Analyses,” *Civ. Eng. Dimens.*, vol. 13, no. 1, pp. 42–49, 2011.
- [8] F. T. Wong and W. Kanok-Nukulchai, “Kriging-based Finite Element Method for Analyses of Reissner-Mindlin plates,” in *Proceedings of the Tenth East-Asia Pacific Conference on Structural Engineering and Construction, Emerging Trends: Keynote Lectures and Symposia*, 2006, pp. 509–514.
  - [9] F. T. Wong, “Kriging-Based Finite Element Methods for Analyses of Shear Deformable Beams and Plates,” in *Proceedings of the 6th Civil Engineering Conference in Asian Region and Annual HAKI Conference*, 2013, p. Paper ID#63.
  - [10] F. T. Wong and W. Kanok-Nukulchai, “On Alleviation of Shear Locking in the Kriging-Based Finite Element Method,” in *Proceedings of International Civil Engineering Conference “Towards Sustainable Engineering Practice,”* 2006, pp. 39–47.
  - [11] F. T. Wong and W. Kanok-Nukulchai, “A Kriging-based Finite Element Method for Analyses of Shell Structures,” in *Proceedings of the Eighth World Congress on Computational Mechanics and the Fifth European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, 2008, no. ECCOMAS, p. a1247.
  - [12] F. T. Wong, Y. Christabel, P. Pudjisuryadi, and W. Kanok-Nukulchai, “Testing of the Kriging-based Finite Element to Shell Structures with Varying Thickness,” *Procedia Eng.*, vol. 125, pp. 843–849, 2015.
  - [13] W. Kanok-Nukulchai and F. T. Wong, “A Finite Element Method Using Node-based Interpolation,” in *Proceedings of the Third Asia-Pacific Congress on Computational Mechanics and the Eleventh International Conference on Enhancement and Promotion of Computational Methods in Engineering and Sciences*, 2007, pp. PL3–3.
  - [14] F. T. Wong, “A Breakthrough Enhancement of Finite Element Method using Kriging Interpolation,” in *Proceedings of the First Indonesian Structural Engineering and Materials Symposium*, 2011, no. November, pp. 11–1–11–16.
  - [15] W. Kanok-Nukulchai and F. T. Wong, “A Break-Through Enhancement of FEM Using Node-Based Kriging Interpolation,” *IACM Expressions*, pp. 24–29, 2008.
  - [16] F. T. Wong and W. Kanok-Nukulchai, “Kriging-Based Finite Element Method : Element-By-Element Kriging Interpolation,” *Civ. Eng. Dimens.*, vol. 11, no. 1, pp. 15–22, 2009.
  - [17] W. Kanok-Nukulchai, F. T. Wong, and W. Sommanawat, “Generalization of FEM using Node-Based Shape Functions,” *Civ. Eng. Dimens.*, vol. 17, no. 3, pp. 152–157, 2015.
  - [18] F. T. Wong and W. Kanok-Nukulchai, “On the Convergence of the Kriging-based Finite Element Method,” *Int. J. Comput. Methods*, vol. 06, no. 01, pp. 93–118, Mar. 2009.
  - [19] H. Wackernagel, *Multivariate Geostatistics*, 3rd ed. Berlin: Springer, 2003.
  - [20] R. A. Olea, *Geostatistics for Engineers and Earth Scientists*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.
  - [21] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, and R. J. Witt, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4th ed. John Wiley & Sons, Ltd, 2002.
  - [22] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
  - [23] T. J. R. Hughes, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, 1987.
  - [24] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method, Volume 1: The Basis*, Fifth Edit. Massachusetts: Butterworth-Heinemann, 2000.
  - [25] P. Pudjisuryadi, “Introduction to Meshless Local Petrov-Galerkin Method,” *Civ. Eng. Dimens.*, vol. 4, pp. 112–116, 2002.
  - [26] S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, Third Edit. New York:

McGraw-Hill, 1987.